Rapports internes du LaMSID

S. ANDRIEUX, H.D. BUI

Ecart à la réciprocité et identification de fissures en thermoélasticité isotrope transitoire

RI-B3-N°001 Octobre 2005

Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables
UMR EDF-CNRS 2832
EDF R&D
1, Avenue du Général de Gaulle - 92141 CLAMART CEDEX France

Ecart à la réciprocité et identification de fissures en thermoélasticité isotrope transitoire

Stéphane ANDRIEUX Huy Duong BUI

Résumé
On s'intéresse à un solide élastique isotrope renfermant une ou plusieurs fissures planes, et soumis à un chargement d'origine thermique variable dans le temps. On relève la valeur du champ de déplacement et du champ des tractions surfaciques sur le bord du solide. On propose ici la définition et l'exploitation d'un écart à la réciprocité, formulé uniquement à partir des grandeurs mécaniques connues sur le bord du solide, qui permet de déterminer explicitement le plan renfermant la ou les fissures, les conditions régnant sur celles-ci étant quelconques dès lors qu'elles assurent la continuité du vecteur contrainte et du flux de chaleur normal.

Ce rapport est la version étendue d'un projet de Notes aux Comptes Rendus Mécanique.

Abstract
We consider a three-dimensional homogeneous isotropic elastic solid containing a family of planar cracks submitted to a time-dependant thermal loading. The displacement and surface traction fields are measured over the whole external boundary of the solid. We propose in this Note to define and exploit a reciprocity gap, based only on the mechanical quantities available on the boundary, and which enables us to derive explicit formula for the location of the plane where the cracks are lying. Boundary conditions on the cracks are of any nature provided they ensure that the normal heat flux and surface traction vector are continuous across the crack surfaces.

This report is an extended version of a paper submitted to the Comptes Rendus Mécanique

1. Introduction

On s'intéresse à un solide tridimensionnel contenant éventuellement une ou plusieurs fissures portées par un même plan. Sous sollicitations thermomécaniques, excluant cependant les forces de masses, un champ de température et un champ de déplacement se développent au sein du solide. On suppose connus, sur tout le bord extérieur, le champ de déplacement, le champ de densité surfacique de force. On propose ici la définition et l'exploitation d'un écart à la réciprocité, formulé uniquement à partir des grandeurs mécaniques connues sur le bord du solide, qui permet de déterminer explicitement le plan renfermant la ou les fissures. Ces résultats étendent les résultats obtenus en thermique stationnaire [5] et en élasticité [6]. Ils peuvent cependant conduire à des méthodes de contrôle plus réalisables puisque l'on pourrait se borner à imposer à un solide, libre de tout chargement mécanique, un chargement thermique, dont il est inutile de connaître la nature, et de relever le champ de déplacement en surface. L'exploitation de ces données à différents instants permet par ailleurs de lever l'ambiguïté sur la normale au plan de fissure qui subsiste en élasticité lorsqu'une seule mesure est disponible [6].

En notant $\underline{u}$ et τ les champs de déplacement et de température, **A** le tenseur de rigidité (isotrope et homogène), α le coefficient de dilatation linéaire, k la conductivité (également isotrope et homogène) et ρc la chaleur massique, les équations d'équilibre thermoélastique et d'évolution thermique sont les suivantes dans le cadre des petites perturbations et négligeant les effets d'inertie mécaniques, mécaniques (pour alléger l'écriture nous omettons les mesures dans les intégrales) :

$$\begin{cases} \int_\Omega \mathbf{A} : (\varepsilon(\underline{u}) - \alpha\tau\mathbf{I}) : \varepsilon(\underline{w}) = \int_{S_{ext}} \underline{F}.\underline{w} - \int_\Gamma \mathbf{A} : (\varepsilon(\underline{u}) - \alpha\tau\mathbf{I}).\underline{N}.[\![\underline{w}]\!] & \forall \underline{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3, \forall t \\ \int_\Omega k\nabla\tau.\nabla\varphi + \rho c\dot{T}\varphi = \int_\Omega s\varphi + \int_{S_{ext}} \Phi\varphi - \int_\Gamma k\nabla\tau\,\underline{.}N[\![\varphi]\!] & \forall \varphi \in H^1(\Omega \setminus \Gamma), \forall t \end{cases} \tag{1}$$

Cette écriture n'est valable que si sur les lèvres des fissures règnent des conditions aux limites imposant la continuité du flux normal de chaleur et du vecteur contrainte, conditions qu'il est cependant inutile ici de préciser plus. En particulier des conditions de contact avec frottement peuvent être prises en compte sans difficulté, la seule limitation est que ces conditions ne conduisent pas pour les chargements étudiés à une fermeture totale de la fissure avec blocage du glissement tangentiel puisque dans ce cas les fissures deviennent indiscernables du milieu non fissuré sur le plan mécanique.

$\underline{F}$ et Φ sont respectivement la densité de force et de flux de chaleur imposé sur le bord du solide, s la source de chaleur. La discontinuité d'un champ à la traversée de fissures est notée à l'aide du symbole $[\![.]\!]$: $[\![f]\!] = f(x^+) - f(x^-)$, $x^+ \in \Gamma^+, x^- \in \Gamma^-$, Γ^+ (respectivement Γ^-) étant la face de normale extérieure $-\underline{N}$. Enfin la température de référence du matériau constituant le solide est prise égale à zéro.

Le champ de déplacement $\underline{U}^m$ et la densité de force $\underline{F}$ étant mesurés sur le bord extérieur S_{ext} du solide à divers instants (en nombre fini), le problème d'identification des fissures consiste à déterminer tout d'abord le plan renfermant celles-ci puis d'en déterminer la forme dans ce plan, à partir des données surabondantes que constitue le couple ($\underline{U}^m$, $\underline{F}$). Dans cette version du problème d'identification, on ne suppose connus ni les sources s, ni les flux de chaleurs Φ imposés au solide, ni même la température en surface. De ce fait, la connaissance des conditions initiales en température pour le problème d'évolution posé sur celle-ci est également superflue. On se borne dans ici à donner les résultats d'identification obtenus pour le plan de fissure. Les résultats sur la géométrie de la fissure, plus longs à présenter, feront l'objet d'une publication ultérieure.

Si la question d'identification de fissures à l'aide de mesures thermiques (problème thermique seul) ou mécanique (problème élastostatique seul) a fait l'objet de nombreux travaux ([1]-[6]), forts peu en revanche se sont intéressés au problème thermoélastique. De plus, la formulation du problème inverse géométrique d'identification de fissures basé sur les équations de la thermoélasticité transitoire et utilisant uniquement des mesures mécaniques n'a jamais été abordée jusqu'ici à la connaissance des auteurs.

2. Ecart à la réciprocité et condition sur les champs auxiliaires

Le principe de l'écart à la réciprocité consiste à écrire l'expression de réciprocité de Maxwell-Betti, non pas entre deux solutions du problème élastique posé sur un même domaine, mais entre une solution élastique sur le domaine renfermant potentiellement des fissures (le champ est alors le champ réel) et une solution du problème élastique posé sur le domaine non fissuré. Cette expression n'est alors pas identiquement nulle, sa valeur pour chaque champ en équilibre élastique dans le domaine sain fournit des informations sur les discontinuités de déplacement à la traversée des fissures. Il est possible d'exploiter ces informations dans le cas de fissures planes pour déterminer le plan contenant les fissures.
Si $\underline{v}$ est un champ de déplacement solution du problème d'élasticité dans le domaine sain, c'est à dire vérifiant :

$$\int_{\Omega} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}) : \varepsilon(\underline{w}) = \int_{S_{ext}} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}).\underline{n}.\underline{w} \quad \forall \underline{w} \in H^1(\Omega)^3 \tag{2}$$

on définit la forme linéaire ER_t suivante, dite écart à la réciprocité à l'instant t :

$$ER_t(\underline{v}) = \int_{S_{ext}} \left[\mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}).\underline{n}.\underline{U}^m(t) - \underline{F}(t).\underline{v} \right] \tag{3}$$

L'écart à la réciprocité ER_t se calcule pour tout champ $\underline{v}$ par une intégrale sur le bord du solide ne faisant intervenir que des quantités connues ($\underline{F}$, $\underline{U}^m$); il possède une propriété intéressante qui permet de faire apparaître explicitement le domaine Γ occupé par les fissures :

$$ER_t(\underline{v}) = \int_{\Gamma} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}).\underline{N}.[\![\underline{u}(t)]\!] + \int_{\Omega} 3K\alpha\tau(t)\, div(\underline{v}) \qquad \textit{pour tout } \underline{v} \textit{ satisfaisant } (2) \tag{4}$$

où K est le module de compressibilité élastique du matériau qui s'exprime à partir des deux coefficients de Lamé : $3K = 3\lambda + 2\mu$.

<u>*Preuve :*</u>

Elle est immédiate, en effet de l'identité suivante due à la symétrie du tenseur de rigidité,

$$\int_{\Omega\setminus\Gamma} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{u}) : \varepsilon(\underline{v}) - \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}) : \varepsilon(\underline{u}) = 0$$

on déduit l'égalité recherchée, grâce à l'équation d'équilibre thermo-élastique sur $\underline{u}$ (1), et l'équation d'équilibre élastique que satisfait $\underline{v}$.

On notera que $\underline{v}$ étant continu ainsi que le vecteur contrainte qui lui est associé, la formulation faible de l'équilibre élastique (3) à utiliser pour des champs $\underline{w}$ appartenant seulement à $H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3$ est la suivante :

$$\int_{\Omega\setminus\Gamma} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}) : \varepsilon(\underline{w}) = \int_{S_{ext}} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}).\underline{n}.\underline{w} - \int_{\Gamma} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}).N.[\![\underline{w}]\!] \quad \forall \underline{w} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma)^3$$

Par ailleurs le milieu étant isotrope on a :

$$\mathbf{A} : (\alpha\tau\mathbf{I}) : \varepsilon(\underline{v}) = 3K\alpha\tau\, tr(\varepsilon(\underline{v})) = 3K\alpha\tau\, div(\underline{v})$$

♦

On constate aisément que l'écart est identiquement nul si le solide est à sa température de référence et ne contient aucune fissure. Dans cette expression figure le champ de température réel τ à l'intérieur du solide, champ bien entendu inconnu. Pour lever cette difficulté et ne plus faire apparaître que le premier terme portant sur le domaine occupé par les fissures, on impose une contrainte supplémentaire sur les champs auxiliaires $\underline{v}$. Suivant une idée due à Bui [7] et utilisée dans la construction d'intégrales invariantes en mécanique linéaire de la rupture, on considère les champs $\underline{v}^{*j}$ suffisamment réguliers qui satisfont pour l'indice j l'équation :

$$\Delta v_j^{*j} = 0 \quad dans\,\Omega \quad (sans\,sommation) \tag{5}$$

c'est-à-dire les champs pour lesquels la $j^{ème}$ composante est harmonique dans l'ouvert non fissuré. On a alors la propriété suivante (sans sommation) :

$$ER_t(\underline{v}^{*j}{}_{,j}) = \int_\Gamma \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}^{*j}{}_{,j}).\underline{N}.[\![\underline{u}(t)]\!] \qquad pour\,tout\;\underline{v}^{*j}\;régulier\,satisfaisant\,(2)\,et\,(5) \tag{6}$$

La régularité nécessaire est ici : $\underline{v}^{*j}{}_{,j} \in H^1(\Omega)$.

<u>Preuve :</u>

Elle repose sur deux résultats :

- Tout d'abord, si la régularité est suffisante, le champ $v^{*j}{}_{,j}$ est un champ solution du problème d'équilibre élastique si bien q'il est licite de lui appliquer la forme linéaire ER_t et la propriété (4). En effet, du fait de la commutativité des dérivées :

$$\sigma(\underline{v}^{*j}{}_{,j}) = A : \varepsilon(\underline{v}^{*j}{}_{,j}) = A : \varepsilon(\underline{v}^{*j}),_j = \sigma(\underline{v}^{*j}),_j$$
$$div\,\sigma(\underline{v}^{*j}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(div\,\sigma(\underline{v}^{*j})\right)_{,j} = div\left(\sigma(\underline{v}^{*j}),_j\right)$$

- Ensuite, en utilisant l'équation de Navier, forme locale de l'équation d'équilibre élastique pour un solide isotrope, que satisfait $\underline{v}^{*j}$:

$$\mu\Delta u^*_i = -(\lambda+\mu)div\,u^*,_i \qquad \forall i$$

  on constate que la condition d'harmonicité imposée à la $j^{ème}$ composante de conduit à la nullité de la divergence de $v^{*j}{}_{,j}$. Ce qui conduit à annuler, comme souhaité, le second terme de la formule générale (4).

3. Formules d'identification du plan de fissure

Muni de la définition (3) de l'écart à la réciprocité et de la propriété (6) obtenue pour la famille de champs auxiliaires satisfaisant :

$$\begin{cases} Pour\ j = 1,2\ \ ou\ \ 3 \\ \underline{v}^{*j}{}_{,j} \in H^1(\Omega)^3 \\ \int_\Omega \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}^{*j}) : \varepsilon(\underline{w}) = \int_{S_{ext}} \mathbf{A} : \varepsilon(\underline{v}^{*j}).\underline{n}.\underline{w} \qquad \forall \underline{w} \in H^1(\Omega)^3 \\ \int_\Omega \nabla v^{*j}{}_j.\nabla\varphi = \int_{S_{ext}} \nabla v^{*j}{}_j.\underline{n}\,\varphi \qquad\qquad \forall\varphi \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{7}$$

on peut formuler les résultats principaux obtenus, qui permettent *sans aucune* résolution de problèmes thermoélastiques, d'identifier complètement le plan refermant (par hypothèse) l'ensemble des fissures.

3.1 Formules d'identification de la normale au plan de fissure(s)

Introduisons le tenseur symétrique **P** d'ordre deux défini par :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left(\int_\Gamma [\![\underline{u}]\!] \otimes \underline{N} + \underline{N} \otimes \int_\Gamma [\![\underline{u}]\!]\right) = (N \otimes U)^s \tag{8}$$

et les champs de déplacements $\underline{v}^{*i}$ et $\underline{w}^{*}$ dont les composantes dans un repère cartésien sont données par les expressions suivantes :

$$\underline{v}^{*1} = \begin{bmatrix} 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}^{*2} = \begin{bmatrix} -2x_1 x_2 \\ 2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 \\ -2x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}^{*3} = \begin{bmatrix} -2x_1 x_3 \\ -2x_3 x_2 \\ 2x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{w}^{*} = \begin{bmatrix} 2x_2 x_3 \\ 2x_3 x_1 \\ 2x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

alors les composantes de la partie déviatorique $\tilde{\mathbf{P}}$ de $\mathbf{P}$ peuvent être déterminées à partir du calcul de la valeur de la forme linéaire d'écart à la réciprocité sur les champs ainsi définis. Plus précisément :

$$\begin{cases} \tilde{P}_{ii} = \dfrac{1}{12\mu} ER_t(v^{*i}_{,i}) \quad \textit{sans sommation} \\ \tilde{P}_{ij} = \dfrac{|\varepsilon_{ijk}|}{8\mu} ER_t(w^{*}_{,k}) \quad i \neq j \end{cases} \tag{10}$$

où ε_{ijk} sont les composantes du tenseur de permutation.

<u>*Preuve :*</u>

Constatons que pour les champs introduits, l'équilibre élastique est automatiquement vérifié (là encore en examinant les équations de Navier) puisqu'ils satisfont :

$$div\ \underline{u}^* = 0 \text{ et } \Delta \underline{u}^*_i = 0 \qquad \text{pour tout } i$$

ce qui permet *ispso facto* de satisfaire également à la condition supplémentaire d'harmonicité de <u>toutes</u> leurs composantes.

En notant : $U_i = \int_\Gamma [\![\underline{u}_i]\!]$, un simple calcul montre que :

$$12\mu(N_i.U_i - \frac{1}{3}N.U) = ER_t(\underline{v}^{*i}_{,i}) \quad \forall i \quad (\textit{sans sommation})$$

En effet, pour i=1 par exemple, on a successivement:

$$\underline{v}^{*1}_{,1} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{bmatrix} \quad d'où \quad \varepsilon\left(\underline{v}^{*1}_{,1}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma\left(\underline{v}^{*1}_{,1}\right) = 2\mu \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad d'où \quad \sigma\left(\underline{v}^{*1}_{,1}\right).\underline{N} = \begin{bmatrix} 8\mu N_1 \\ -4\mu N_2 \\ -4\mu N_3 \end{bmatrix} = cste\,sur\,\Gamma$$

et donc :

$$ER_t(\underline{v}^{*1}_{,1}) = 8\mu N_1.U_1 - 4\mu\left(N_2.U_2 + N_3.U_3\right)N = 12\mu N_i.U_i - 4\mu N.U$$

On en déduit ainsi la première égalité de (10). La seconde égalité est obtenue à l'aide du champ $\underline{w}^*$. Un calcul similaire conduit à :

$$\sigma\left(\underline{w}^*_{,1}\right)=4\mu\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\ d'où\ \ \sigma\left(\underline{w}^*_{,1}\right).\underline{N}=\begin{bmatrix}0\\4\mu N_3\\4\mu N_2\end{bmatrix}=cste\,sur\,\Gamma$$

et donc :

$$ER_t(w^*_{,k})\left|\varepsilon_{ijk}\right|=8\mu\frac{1}{2}(N_iU_j+N_jU_i)=8\mu(N\otimes U)_{ij}^{s\,dev}=8\mu\tilde{\mathbf{P}}_{ij}$$

Ce qui fournit l'une des trois égalités de la seconde partie de (10), et achève la démonstration ♦

Puisque $\underline{N}$ est un vecteur unitaire, on déduit de la connaissance du tenseur $\tilde{\mathbf{P}}$ les résultats suivants (seuls cas possibles pour les valeurs principales de $\tilde{\mathbf{P}}$) :

- Si $\tilde{\mathbf{P}}$ possède une valeur principale double Λ:
  Alors, la normale au plan de fissure est donnée par la direction principale associée à la valeur principale simple, l'intégrale du saut de déplacement sur les fissures est portée par $\underline{N}$ et a pour intensité $3\Lambda/2$.
- Si $\tilde{\mathbf{P}}$ possède trois valeurs principales simples $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ordonnées par valeurs décroissantes, les directions principales normées étant $(\underline{V}_1,\ \underline{V}_2\ ,\underline{V}_3)$, et en notant $\Lambda_{ij}=\Lambda_i-\Lambda_j$, la normale $\underline{N}$ et l'intégrale du saut de déplacement $\underline{U}$ sur les fissures sont données par :

$$\underline{N}=\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{12}}\underline{V}_1-\sqrt{\Lambda_{23}}\underline{V}_3\right)\ ,\ \underline{U}=-3\Lambda_2\underline{N}+2\sqrt{\frac{\Lambda_{12}\Lambda_{23}}{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{23}}\underline{V}_1+\sqrt{\Lambda_{12}}\underline{V}_3\right)\qquad(13)$$

Preuve :

Pour déduire l'identification des vecteurs *N* et *U* qui est possible à partir de la connaissance du déviateur du teneur **P**, produit tensoriel symétrisé de ces deux vecteurs, on s'appuie sur le lemme suivant qui détaille les forme des valeurs et directions principales du tenseur $\tilde{\mathbf{P}}$.

Lemme : Soit le tenseur $\mathbf{P}=\left(U\otimes N\right)^s$, où *N* est un vecteur unitaire, alors les valeurs et directions principales (λ_i, V_i) du tenseur $\tilde{\mathbf{P}}$ sont :

- Si $U=\alpha N+M$, $N.M=0,\ M\neq 0$

$$\lambda_1=-\frac{\alpha}{3},\qquad V_1=\frac{N\wedge U}{\left\|N\wedge U\right\|}\ ,$$

$$\lambda^\pm=\frac{\alpha}{6}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2+M^2}}{2},\qquad \begin{aligned}V^+&=\frac{1}{\sqrt{\Lambda^+(\Lambda^+-\Lambda^-)}}\left(\Lambda^+N+\sqrt{-\Lambda^+\Lambda^-}\tilde{M}\right)\\ V^-&=\frac{1}{\sqrt{\Lambda^-(\Lambda^--\Lambda^+)}}\left(\Lambda^-N+\sqrt{-\Lambda^+\Lambda^-}\tilde{M}\right)\end{aligned}$$

avec :

$$\Lambda^{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + M^2} \;,\; \tilde{M} = \frac{M}{\|M\|}$$

$$\lambda^{-} < \lambda_1 < \lambda^{+}$$

- Si $U = \alpha N$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{2\alpha}{3}$ (V_1, V_2) vecteur orthogonaux quelconques du plan normal à N,

$\lambda_3 = -\dfrac{\alpha}{3}$, $V_3 = N$

Preuve :

De façon générale on a pour les produits tensoriels de vecteurs :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) : (\underline{c} \otimes \underline{d}) = \underline{a}.\underline{c}\ \underline{b}.\underline{d} \quad , \quad tr(\underline{a} \otimes \underline{b}) = \underline{a}.\underline{b}$$

Décomposons tout d'abord le vecteur U sous la forme : $U = \alpha N + M$, $N.M = 0$, et notons le résultat :

$$\frac{1}{2}\left(U^2 + (U.N)^2\right) = \mathbf{P} : \mathbf{P} = \frac{1}{3} tr(P) tr(P) + \tilde{\mathbf{P}} : \tilde{\mathbf{P}} \quad , \quad tr(\mathbf{P}) = U.N$$

d'où

$$\tilde{\mathbf{P}} : \tilde{\mathbf{P}} = \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{2}M^2$$

Supposant pour le moment M non nul (U et N non parallèles), déterminons maintenant les directions principales et valeur principales de $\tilde{\mathbf{P}}$. Pour cela par définition, si $\tilde{\mathbf{P}}$ est interprété comme un endomorphisme de IR^3, on a pour tout vecteur V :

$$\tilde{\mathbf{P}}.V = \frac{1}{2} U.V\, N + \frac{1}{2} N.V\, U - \frac{1}{3} U.N\, V$$

on obtient l'équation aux valeurs propres :

$$U.V_\lambda\, N + N.V_\lambda U = 2\frac{\alpha + 3\lambda}{3} V_\lambda$$

On constate qu'il existe toujours une direction principale orthogonale au plan (N,U) ou (N,M) de façon équivalente, associée à la valeur principale $-\alpha/3$, ainsi :

$$V_1 = \frac{N \wedge U}{\|N \wedge U\|} \;,\; \lambda_1 = -\frac{\alpha}{3}$$

Décomposant les deux autres directions propres V_λ , orthogonales à celle-ci sur les vecteurs N et M :

$$V_\lambda = xN + yM$$

l'équation aux valeurs propres se réduit au système suivant par projection sur les vecteurs N et M, en ayant posé : $\Lambda = \dfrac{2}{3}(\alpha + 3\lambda)$

$$\begin{cases} 2\alpha x + M^2 y = \Lambda x \\ M^2 x = \Lambda M^2 y \end{cases}$$

Puisque M^2 est non nul par hypothèse, on obtient l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\Lambda^2 - 2\alpha\Lambda - M^2 = 0$$

D'où, successivement :

$$\Lambda^{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + M^2} \qquad\qquad \lambda^{\pm} = \frac{\alpha}{6} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 + M^2}}{2}$$

On vérifie au passage que la somme des valeurs principales est bien nulle :

$$\lambda_1 + \lambda^+ + \lambda^- = -\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + M^2}}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + M^2}}{2} = 0$$

et que ces valeurs sont touts simples. Par ailleurs, $M^2 = -\Lambda^+\Lambda^-$

Les directions propres normées sont :

$$V^+ = \frac{1}{\sqrt{\Lambda^+(\Lambda^+ - \Lambda^-)}}\left(\Lambda^+ N + \sqrt{-\Lambda^+\Lambda^-}\tilde{M}\right)$$
$$V^- = \frac{1}{\sqrt{\Lambda^-(\Lambda^- - \Lambda^+)}}\left(\Lambda^- N + \sqrt{-\Lambda^+\Lambda^-}\tilde{M}\right) \qquad \text{avec } \tilde{M} = \frac{M}{\|M\|}$$

De plus, on a la relation d'ordre suivante (les valeurs principales étant distinctes puisque M est non nul):

$$\lambda^- = \frac{\alpha}{6} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + M^2}}{2} < \lambda_1 = -\frac{\alpha}{3} < \lambda^+ = \frac{\alpha}{6} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + M^2}}{2}$$

Si donc les trois valeurs principales simples (Λ_1, Λ_2, Λ_3) sont ordonnées par valeurs décroissantes, les directions principales normées étant (V_1, V_2, V_3) on a :

$$\Lambda^+ = \Lambda_1 \;,\; \lambda_1 = \Lambda_1 \;,\; \Lambda^- = \Lambda_3$$

et :

$$\Lambda^+ = 2(\Lambda_1 - \Lambda_2) = 2\Lambda_{12} \qquad V_1 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{12}}N + \sqrt{\Lambda_{23}}\tilde{M}\right)$$
$$\Lambda^- = 2(\Lambda_3 - \Lambda_2) = -2\Lambda_{23}$$
$$\Lambda^+ - \Lambda^- = 2\Lambda_{13} \qquad V_3 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(-\sqrt{\Lambda_{23}}N + \sqrt{\Lambda_{12}}\tilde{M}\right)$$

d'où :

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{12}}V_1 - \sqrt{\Lambda_{23}}V_3\right) \qquad \text{et} \qquad U = \alpha N + \|M\|\tilde{M}$$
$$\tilde{M} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{23}}V_1 + \sqrt{\Lambda_{12}}V_3\right) \qquad\qquad = -3\Lambda_2 N + 2\sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{23}}\tilde{M}$$

Finalement :

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{12}}V_1 - \sqrt{\Lambda_{23}}V_3\right) \quad , \quad U = -3\Lambda_2 N + 2\sqrt{\frac{\Lambda_{12}\Lambda_{23}}{\Lambda_{13}}}\left(\sqrt{\Lambda_{23}}V_1 + \sqrt{\Lambda_{12}}V_3\right)$$

Examinons maintenant le cas M=0, c'est à dire U=αN. L'équation aux valeurs propres devient :

$$\alpha N.V_\lambda\, N = \frac{\alpha+3\lambda}{3} V_\lambda$$

Par conséquent, le tenseur $\tilde{\mathbf{P}}$ possède :

- une valeur principale double, $\lambda = -\alpha/3$ associée à deux vecteurs orthogonaux quelconques du plan normal à N ;
- et une valeur simple, $\lambda = 2\alpha/3$ associée à la direction *N*.

♦

On déduit de ces résultats que la connaissance de $\tilde{\mathbf{P}}$ conduit à celle des vecteurs $\underline{N}$ et $\frac{U}{\|U\|}$ sans que l'on puisse les distinguer. Il est également indispensable que le chargement mécanique ou thermique conduise à une solution thermoélastique pour laquelle l'une au moins des trois composantes de la discontinuité moyenne de déplacement ne soit pas nulle. Cette condition peut cependant être vérifiée en examinant la nullité éventuelle du tenseur **P** obtenu par les équations (10).

3.2 Formule d'identification complète du plan de fissure(s)

Connaissant la normale $\underline{N}$, on effectue un changement de coordonnées tel que dans le nouveau repère (O, x,y,z) l'axe Oz soit dirigé par le vecteur $\underline{N}$ et que la composante selon Ox du saut de déplacement moyen sur les fissures ne soit pas nulle (cette dernière condition pouvant être satisfaite via un nouveau changement de repère à partir de l'identification des composantes de la moyenne du saut de déplacement fournie par l'équation (13)). L'équation du plan affine renfermant les fissures est maintenant : $z - C = 0$. Le scalaire *C* est déterminé par la formule suivante :

$$C = \frac{1}{6\mu U_x} RG_t(h^*_{,x}) \quad \text{où} \qquad h^* = \begin{bmatrix} 3x(z^2-y^2) \\ y^3 - 3z^2 y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Preuve :

Constatons encore que ce champ est à divergence nulle, et que chacune de ses composantes est harmonique. Ceci permet de satisfaire les conditions d'équilibre, ainsi que la condition supplémentaire d'application de la propriété (6). Il suffit alors de calculer :

$$\underline{h}^*_{,1} = \begin{bmatrix} 3(z^2-y^{2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d'où \quad \varepsilon\left(\underline{h}^*_{,1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -3y & 3z \\ -3y & 0 & 0 \\ 3z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma\left(\underline{h}^*_{,1}\right) = 2\mu \begin{bmatrix} 0 & -3y & 3z \\ -3y & 0 & 0 \\ 3z & 0 & 0 \end{bmatrix} \; d'où \; \sigma\left(\underline{h}^*_{,1}\right).\underline{N} = \begin{bmatrix} 6\mu(zN_3 - yN_2) \\ -6y\mu N_1 \\ 6z\mu N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\mu C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} sur\,\Gamma$$

ce qui conduit à :

$$RG_t(h^*_{,x}) = 6\mu U_x C$$

♦

4. Conclusion

Les résultats obtenus montrent que l'on peut, sans aucune résolution du problème direct qu'il soit thermique ou élastique, déterminer explicitement le plan de fissures. L'écart à la réciprocité introduit n'utilise par ailleurs que les données mécaniques sur le bord du solide. Ainsi il est possible d'imaginer appliquer un chargement thermique à un solide, par ailleurs libre de contraintes, et d'identifier le plan de fissure par la simple mesure des déplacements en surface à au moins deux instants différents, sans qu'il soit nécessaire de connaître quoi que ce soit du chargement thermique appliqué et du champ de température qui se développe dans le solide ou même sur sa surface.

La détermination complète de la position et de la forme des fissures pourrait s'opérer comme dans les cas précédemment étudiés ([5],[6]) via l'identification complète du saut de déplacement sur les fissures. Ceci suppose néanmoins que l'on puisse établir deux résultats :

- Le premier concerne l'identité entre le support du saut de déplacement et le domaine occupé par les fissures, ce résultat mathématique n'est à la connaissance des auteurs pas connu actuellement pour les équations du problème thermoélastique ;
- Le second concerne la construction d'une famille de champs auxiliaires dont les champs de vecteur contrainte sur le plan de fissure forment une base hilbertienne, cela afin d'identifier par un raisonnement classique, le saut de déplacement à partir de la connaissance de ses produits scalaires avec une famille complète.

Ces recherches feront l'objet de travaux futurs.

Références

[1] A. Friedman, M. Vogelius, determining cracks from boundary measurements, Indiana Univ. Math. J. 38, 3, 1989

[2] G. Alessandrini, G. Dibeneditto, Determining two-dimensional cracks in three-dimensional bodies : uniqueness and stability , Indiana Univ. Math. J. 46, pp 1-82, 1997

[3] A. Ben Abda, H. Ben Ameur, M. Jaoua, Identification of 2D cracks by boundary elasticity measurements, Inverse Problems, 15, ,1, pp 67-77,1999.

[4] G. Nakamura, G. Uhlmann, J.N. Wang, Unique Continuation for Elliptic Systems and Crack Determination in Anisotropic Elasticy , Contemp. Math., 362, pp321-338, 2004.

[5] S. Andrieux, A. Ben Abda, Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formula. Inverse Problems, 12, pp 553-563, 1996.

[6] S. Andrieux, A. Ben Abda, H.D. Bui, Reciprocity principle and crack identification. Inverse Problems, 15, pp 59-65, 1999.

[7] H.D. Bui, A path-independent integral for mixed modes of fracture in linear thermoelasticity, , IUTAM Symposium on Fundamental on Deformation and Fracture, Sheffield, p. 597, 1984