

# Initiation de fissure et propagation de défauts : approche par level-set épaisses

C. Stolz

LMS, CNRS-UMR7649, Ecole polytechnique, Palaiseau

LaMSID, CNRS-UMR2832, EdF R&D, Clamart

---

Objectif principal : concilier

- l'initiation,
- la propagation de fissure
- l'endommagement

dans une même formulation

Plusieurs approches

l'endommagement :  $w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = -g'w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$

Problèmes : instabilités, localisation, perte d'unicité

Remèdes :

- théorie non locale
- théorie de gradient supérieur,
- champ de phases

Théorie locale

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$g(d); \quad h(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq 0, \dot{d} \geq 0, \dot{d} h = 0$$

Théorie non locale (Pijaudier-Cabot,...)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \int_{\Omega} \psi(x-s) I(\boldsymbol{\varepsilon}(s)) \, d\Omega_s$$

Même loi, entre  $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(x)$  et  $d$ .

Choix du support et de la fonction poids

Lien direct avec les méthodes particulières, problèmes sur les frontières

Difficulté lien endommagement rupture.

## Théorie de gradient supérieur et champ de phase

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \boldsymbol{\beta}), \quad \boldsymbol{\beta} = \nabla d$$

(Frémond-Nedjar, Karma, ...)

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}k_o\boldsymbol{\beta}^2 + g(d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon}) + h(d)$$

$$Y = -k_o\Delta d - h' - g'w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Les fonctions  $h(d)$ ,  $g(d)$  sont choisies telles que dans un cas 1-D la réponse locale  $d$  prenne la forme  $d = d_o \text{th}(\alpha x)$  :  $g(d) = 4d^3 - 3d^4$

Variations fortes de  $d$  concentrées sur une bande de largeur contrôlée par  $k_o$  et  $W_o = w_o(\boldsymbol{\varepsilon}_o)$

Conditions aux limites à discuter, résoudre sur tout le volume

---

Ces méthodes ne localisent pas nécessairement sous un chargement de type fissure imposé.

Lien entre initiation de l'endommagement et la fissuration reste à discuter

Choix des grandeurs caractéristiques

## Un autre point de vue

**Séparer la zone saine de la zone endommagée par une surface**

Surface en mouvement : Interface mobile

Surface = iso-potentielle = level-set

Discontinuité = saut = XFEM

## Interface mobile

Etude du mouvement d'une interface avec changement de comportement

- par transition brutale : présence de discontinuités
- par transition continue : couche limite et endommagement continu.

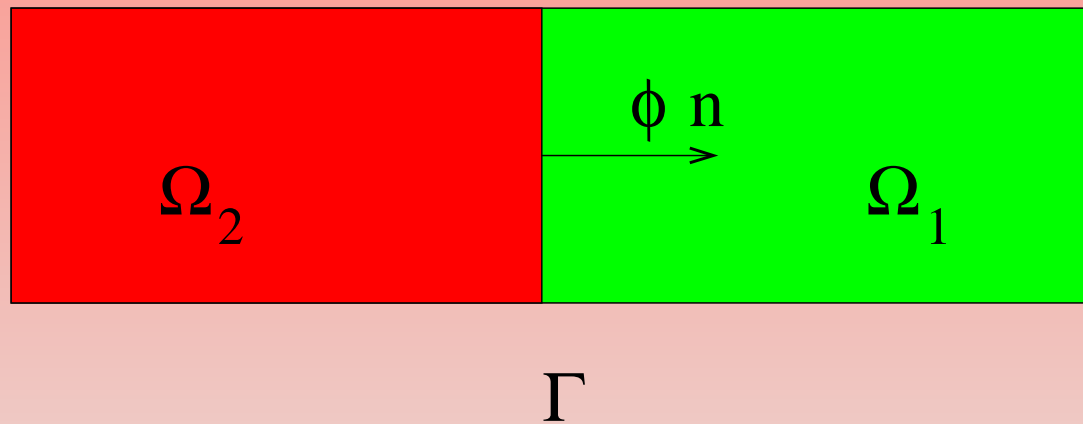


## Interface mobile et transformation mécanique

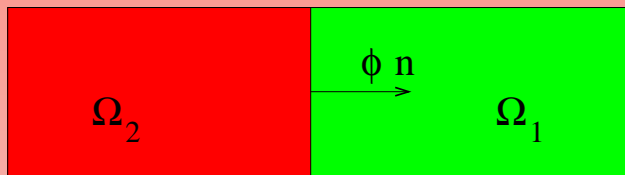
Le matériau 1 est transformé en un matériau 2 le long d'une interface mobile

Un flux de masse traverse la surface : perte de matériau sain (usure...)

## Préliminaires



$$\begin{aligned} F &= \int_a^b f(x, t) dx \\ &= \int_a^{\Gamma(t)} f(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)}^b f(x, t) dx \end{aligned}$$



$\Gamma$

$$\dot{F} = \int_a^b \dot{f} dx + (f(\Gamma^+, t) - f(\Gamma^-, t)) \dot{\Gamma}$$

$$[f]_{\Gamma} = f(\Gamma^+, t) - f(\Gamma^-, t)$$

Propagation d'une interface  
 $\Rightarrow$  présence de discontinuités.

Etudier les discontinuités possibles, relations d'Hadamard, ...

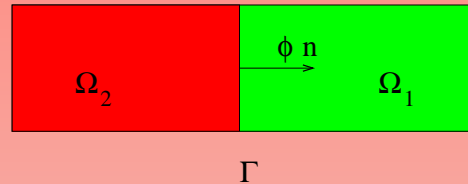
Discontinuité en élasticité linéaire

Sur une surface  $\Gamma$ ,

Continuité des déplacements  $[\underline{u}]_{\Gamma} = 0$

Continuité des vecteurs contraintes  $[\underline{\sigma}]_{\Gamma} \cdot \underline{n} = 0$

Pas de discontinuité des grandeurs mécaniques si et seulement si le comportement (modules) est continu.



Les deux milieux sont élastiques linéaires :  $x$  proportion de phase 2

Equilibre :

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2 = \Sigma, \quad u(0) = 0$$

Energie potentielle :

$$W(\sigma, x) = -\frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{x}{E_2} + \frac{1-x}{E_1} \right)$$

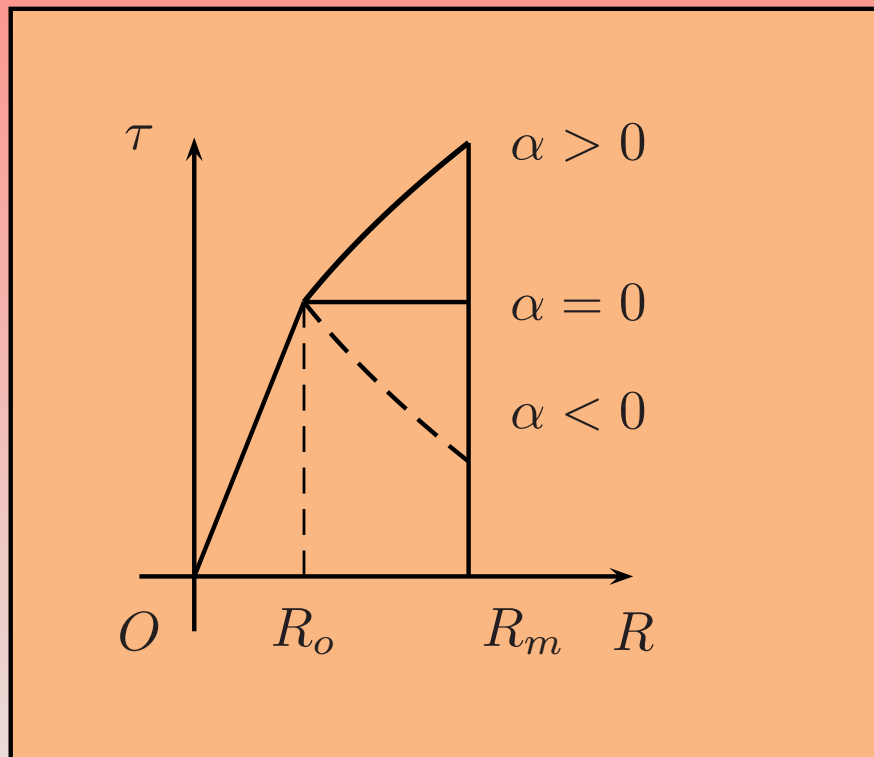
Taux de restitution d'énergie

$$G = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right); \quad D_m = G \dot{x}$$

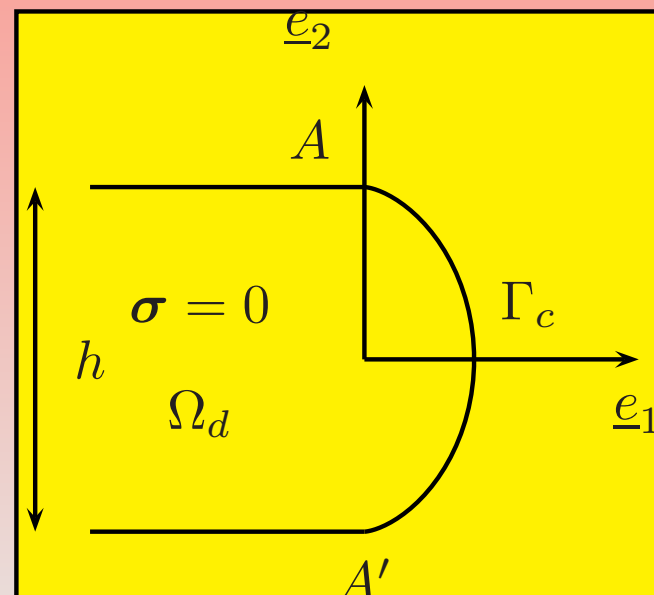
## Etude d'autres exemples

- quasi-fissure en hyper-élasticité fragile
- sphère sous chargement isotrope

Quasi-fissure en conditions de mode III : cisaillement anti-plan



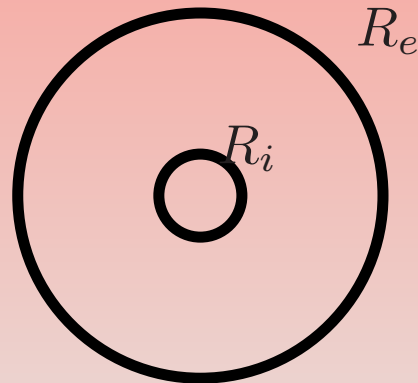
$$\sigma = K/\sqrt{r}f(\theta) \text{ as } r \rightarrow \infty$$



$$K^2 = h \frac{\tau_o^2}{\alpha + 1} \left[ \left( \frac{R_m}{R_o} \right)^{\alpha+1} + \frac{\alpha - 1}{2} \right]$$

Neuber (1969), Bui-Ehrlacher (1978), Stolz (2010).

## Autres exemples



Sous chargement isotrope  $U(R_e, t) = E(t)R_e$

Critère  $G(R_i, t) \leq G_c$  donne l'évolution de la surface



$$\mathcal{G}(R_i, E) = \frac{9E^2}{D^2(c)} (\kappa_1 - \kappa_2)(3\kappa_2 + 6\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_1)$$

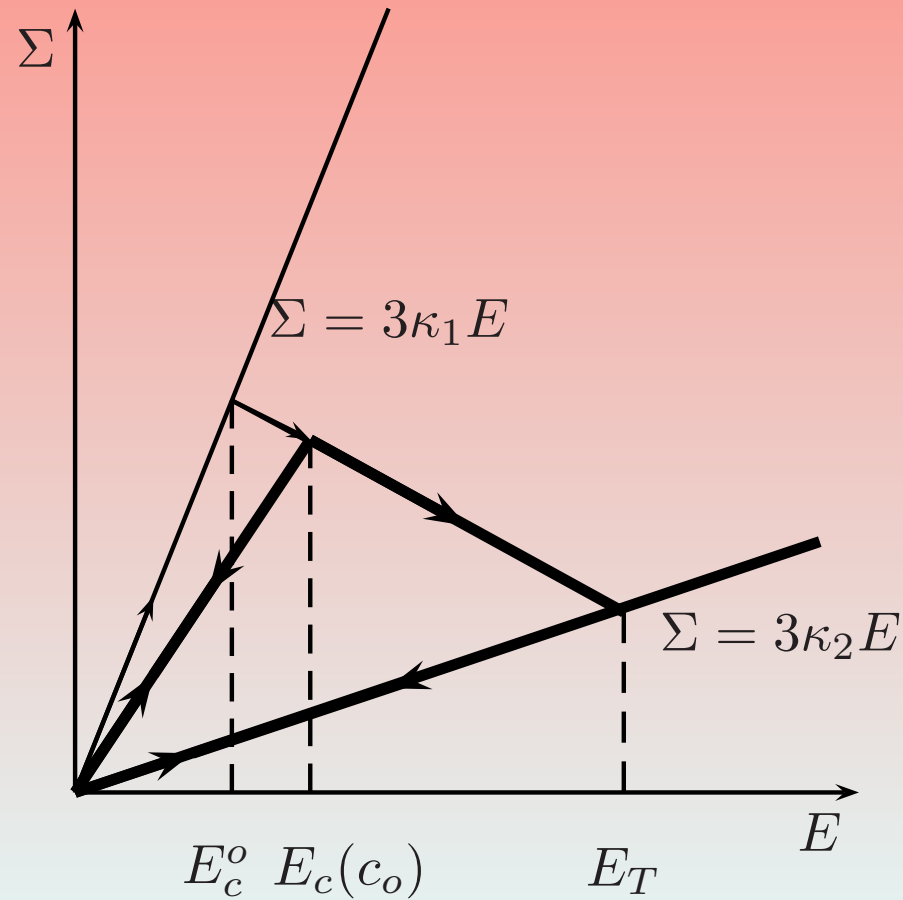
$$D(c) = 3\kappa_2 + 4\mu_1 + 3c(\kappa_1 - \kappa_2), \quad c = \frac{R_i^3}{R_e^3}$$

$$\kappa^{eff} = \frac{(3\kappa_2 + 4\mu_1)\kappa_1 - 4\mu_1 c(\kappa_1 - \kappa_2)}{3\kappa_2 + 4\mu_1 + 3c(\kappa_1 - \kappa_2)}$$

Chargement monotone  $c_o = R_i^3(0)/R_e^3$

$$\left\{ \begin{array}{lll} E(t) < E_c(c_o), & \mathcal{G}(R_i, E(t)) < G_c, & R_i(t) = R_i(0) \\ E(t) \geq E_c(c_o), & \mathcal{G}(R_i(t), E(t)) = G_c, & R_i(t) = f(E(t)), \\ E(t) = E_T, & \mathcal{G}(R_e, E_T) = G_c & R_i(T) = R_e \\ E(t) \geq E_T, & & R_i(t) = R_e \end{array} \right.$$

## Réponse chargement quelconque



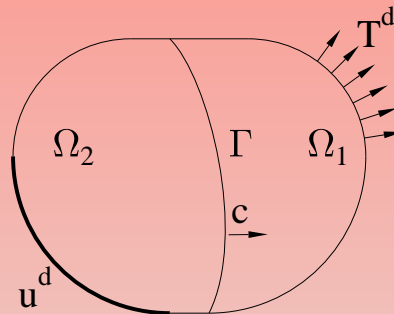
On a déterminé une charge critique d'initiation d'un défaut

Loi de propagation du défaut

La charge critique dépend de la géométrie

Cylindre sous chargement isotrope : charge critique plus basse.

## Description - Cas Général



$$D_m = \int_S \mathcal{G}(s) c(s) \, dS$$

$$\mathcal{G} = [w]_{\Gamma} - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} \leq G_c$$

$$\mathcal{G} \leq G_c, \quad c \geq 0, \quad c (\mathcal{G} - G_c) = 0$$

## Interprétation

$$D_{\Gamma} = \mathcal{G} c, \quad m = \rho c$$

Donc

$m = 0$ , pas de perte de matériau sain  $\Rightarrow$  pas d'endommagement

$$\begin{cases} \mathcal{G}(X, t) < G_c, & c = 0 \\ \mathcal{G}(X, t) = G_c, & c \geq 0 \end{cases}$$

Avantage : problème d'évolution bien posé

Formulations variationnelles du problème en vitesse :

détermination des conditions de stabilité-bifurcation

étude de l'évolution d'un défaut préexistant.

Influence d'une énergie de surface : rôle stabilisant

$$\mathcal{G}_e(R_i, E) = \mathcal{G}_o(R_i, E) - \beta/R_i$$

mais charge critique d'initiation de défaut infinie...

Problème à résoudre : concilier

Une initiation d'un défaut

La propagation du défaut

Après une extension suffisante retrouver "une énergie de surface"  $\beta$

Idée : interface d'épaisseur finie  $l_c$ .



### Interface épaisse

La transition est continue et décrite par une loi d'endommagement continu.

Energie :  $w(\varepsilon, d, \alpha) = (1 - d)w_o(\varepsilon, \alpha) + H(\alpha)$

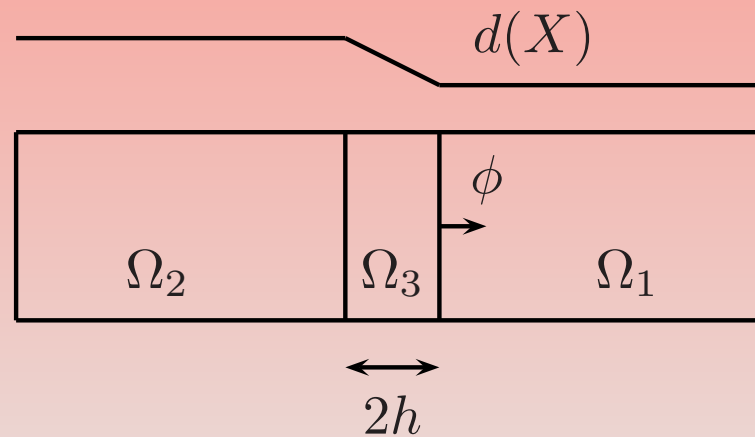
$$Y = -\frac{\partial w}{\partial d}, \quad A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

$d$  varie de 0 à 1, pas de discontinuité.

La dissipation se réduit à celle de volume

$$d_m = Y \dot{d} + A \dot{\alpha}$$

## Dissipation

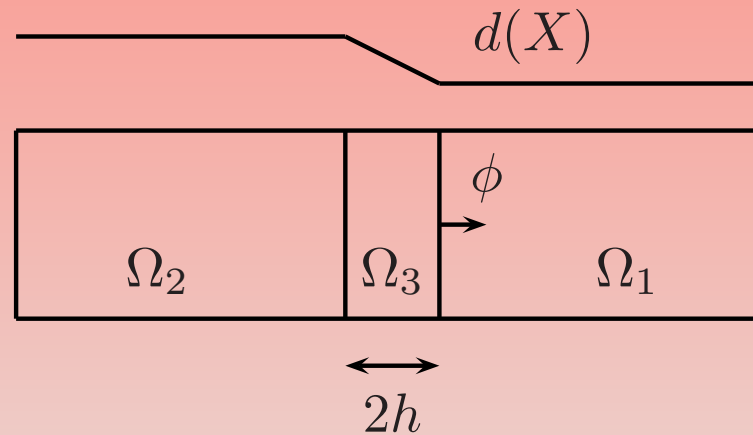


$$D_m = \int_h Y \dot{d} + A \dot{\alpha} dz$$

En suivant le front mobile

$$f(x, t) = f(x - \phi t \underline{n}, t) \quad \dot{f} = -\phi \nabla f \cdot \underline{n} + D_\phi f$$

Exemple 1-D :



Energie :  $W = \frac{1}{2}E(d)\epsilon^2$

Conditions de raccordement  $E(0) = E_1, E(1) = E_2$

Etude de la dissipation sous condition stationnaire ( $\dot{d} + \phi \nabla d \cdot \underline{n} = 0$ )

$$D_m = \phi \int_h^0 \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{E'}{E^2}\right) \nabla d \, dz = \phi \frac{1}{2} \sigma^2 \int_1^0 \left(-\frac{E'}{E^2}\right) dd = G\phi$$

## Dissipation mécanique

$$D_m = -\phi \int_h (Y \nabla d + A \nabla \alpha) dz + \int_h (Y D_\phi d + A D_\phi \alpha) dz$$

on retrouve une forme analogue

$$D_m = \bar{G} \phi + \int_h d_\phi dz$$

En mouvement stationnaire : le dernier terme est nul.

$$\bar{G} = - \int_h (Y \nabla d + A \nabla \alpha) dz \leq h Y_c$$

Initialement la barre est homogène

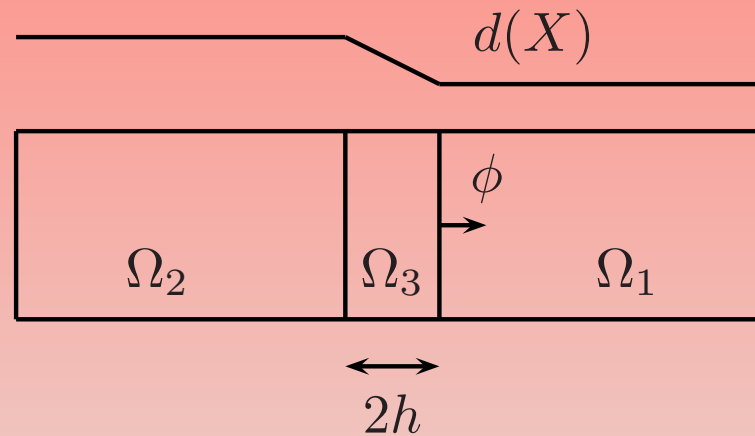
$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L}{E_1}$$

A partir d'une valeur critique  $\Sigma_c, \epsilon_c$  une bande se développe

Hypothèse de stationnarité locale

Le module d'Young  $E(z)$  est une fonction donnée dans la bande,

$z$  coordonnée relative



- phase 1 : barre homogène,  $D_m=0$
- phase 2 ; initiation d'un défaut  $2e_o \leq l_c = 2h$

$$D_m = - \int_{-e_o}^{+e_o} Y \nabla d dz = - \frac{1}{2} \Sigma^2 \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E(e - 2_o)} \right) \dot{e}_o$$

- phase 3 : propagation d'une bande  $2h = l_c$

$$D_m = - \frac{1}{2} \Sigma^2 \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

Conclusion

$$d(z) = d(x - a(t)) = d_o$$

est une surface isoendommagement qui vérifie la relation de transport

$$\dot{d} + a \nabla d \cdot \underline{n} = 0$$

Unidimension  $a$  est indépendant de  $z$ .

### Généralisation

On introduit la courbe de niveau  $\phi = h - z$  telle

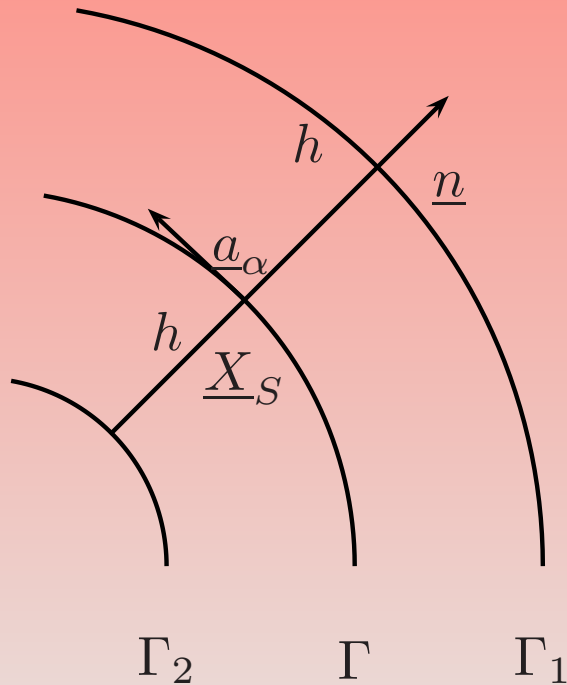
- $d(\phi) = 0; \phi \leq 0$
- $d'(\phi) \geq 0; 0 \leq \phi \leq lc$
- $d(\phi) = 1; \phi \geq lc$

où  $\phi$  est une fonction distance signée  $\|\nabla\phi\| = 1$

Dans la suite on choisit la distance  $\phi = z$ .



Géométrie de l'interface : influence de la courbure:  $\nabla \underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha = -b_\alpha^\beta \underline{a}_\beta$



$$dS(z) = \det(\mathbf{b} + z \mathbf{I}) = j(z) dS$$

$$\int_B f d\Omega = \int_\Gamma \left( \int_h f j(z) dz \right) dS = \int_\Gamma f_S dS$$

Mouvement suivant la bande

$$m(S, z, t) = M(S, t) + z\underline{n}(S, t)$$

A  $t + dt$  le point M est venu en  $M + a\underline{n}$  et la normale a tourné

$$m(t + dt) - m(t) = D_a m = a\underline{n} + zD_a \underline{n}, \quad D_a \underline{n} = -\frac{da}{ds} \underline{T}$$

Dérivée suivant le mouvement

$$D_a(f) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(m(t + dt), t + dt) - f(m(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \cdot D_a m$$

Exemple

$$D_a(\underline{T}) = -\frac{da}{ds} \underline{n}, \quad D_a(\underline{n}) = \frac{da}{ds} \underline{T}, \quad D_a \Gamma = \frac{d^2 a}{ds^2} + \Gamma^2 a \dots$$

Cas courant

$$\phi(\underline{X}, t) = \min_S (\underline{X} - M(S, t)) \cdot \underline{n}(S, t) = z$$

$$\nabla \phi = \underline{n}$$

$$\Delta \phi = -\frac{\Gamma}{1 - \Gamma z}$$

Relation avec la courbure à la cote  $z$

## Dissipation d'endommagement

$$D_m = \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega$$

Comme

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = D_a \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot D_a m$$

On en déduit pour le cas de mouvement stationnaire

$$D_m = - \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot D_a m \, d\Omega$$

Intégration par partie

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B} (\underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \cdot D_a m \, dS + \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}) : \nabla D_a m \, d\Omega$$

Puis par passage à la limite pour épaisseur nulle

$$D_m = \int_S \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} \, dS \, a$$

## Dissipation associée à l'interface

Milieu à endommagement continu

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

La dissipation s'écrit

$$D_m = \int_B Y \dot{d} \, d\Omega$$

Mais  $d = d(\phi)$  donc

$$\dot{d} = d' \dot{\phi} = -ad' \nabla \phi \cdot \underline{n}$$

donc

$$D_m = - \int_B Y d' \nabla \phi \cdot \underline{n} \, d\Omega = - \int_S \int_e Y d' (1 - \Gamma z) dz \, dS$$

$$\bar{\mathcal{G}} = - \int_e Y d' (1 - \Gamma z) ds$$

Loi de propagation

- Choix 1

$$\frac{1}{e}\bar{\mathcal{G}} \leq G_c, \quad a \geq 0, \quad \left(\frac{1}{e}\bar{\mathcal{G}} - G_c\right)a = 0$$

- Choix 2

$$\bar{\mathcal{G}} = - \int_e Y d'(1 - \Gamma z) ds \leq - \int_e Y_c d'(1 - \Gamma z) ds = \bar{G}_c(e, S),$$

$$a \geq 0; \quad (\bar{\mathcal{G}} - \bar{G}_c(e, S))a = 0$$

Implémentation numérique

Exemple

### Conclusions

Potentialité de la méthode

Généralisation au cas élastoplastique

Etude de la génération du défaut initial et analyse asymptotique

Etude du branchement de fissure dans ce cadre.

Passage endommagement-rupture : naturellement contenu

Etude et analyse des grandeurs  $l_c$  par des mesures in-situ (un seul paramètre)

Etude de la loi  $d(\phi)$  par la fonction génératrice du choc : (Stolz-1989)